CB-1.162

VARIAÇÕES EM TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE AO TRABALHOS DESENVOLVIDO POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA SUA FORMAÇÃO INICIAL

António Guerreiro
aguerrei@ualg.pt
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, Portugal

Núcleo temático: Formação de Professores de Matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização docente
Palavras-chave: simetrias; frisos; padrões; formação de professores

Resumo
Nesta comunicação pretendo apresentar um conjunto de ideias resultantes da abordagem das transformações geométricas, numa superfície plana, em resultado da identificação de simetrias, rosáceas, frisos e padrões na natureza, na arte e na arquitetura. Numa perspetiva teórica, abordo algumas variações em torno dos conceitos e das relações geométricas, nomeadamente das isometrias, reforçando as simetrias e a composição de transformações. O trabalho empírico resultou de um conjunto de aulas no ensino superior com futuros professores de um curso de mestrado de ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de matemática e ciências naturais no 2.º ciclo do ensino básico (alunos dos 6 aos 12 anos). A metodologia utilizada na análise dos dados assumiu uma natureza interpretativa com recurso aos registos áudio de todas as aulas, às notas do professor e às produções dos futuros professores no contexto das aulas e dos trabalhos realizados autonomamente. Os dados apontam para uma redescoberta, por parte dos futuros professores, do conceito de simetria, envolvendo simetrias, rosáceas, frisos e padrões, através de um novo olhar matemático sobre a natureza, a arte e a arquitetura, tendo em atenção o trabalho em sala de aula com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.

1. Abertura: Contextualização, Participantes e Propósito

As isometrias do plano são abordadas nos primeiros anos de escolaridade através de representações gráficas sem grande formalização, habitualmente em torno de simetrias de reflexão – construção de figuras com eixo de simetria e identificação de eixos de simetria em figuras planas. No 2.º ciclo do ensino básico, o Programa e Metas Curriculares de Matemática (PMCM) (MEC, 2013) prevê, no 6.º ano de escolaridade, a lecionação das transformações geométricas de reflexão e de rotação e as respetivas simetrias. Do mesmo modo, o anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007) defendia que "as isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (…). Este tipo de

ISBN 978-84-945722-3-4

transformações permite a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas" (p. 37), apresentando como conteúdo matemático a lecionar as reflexões, rotações e translações e as simetrias axial e rotacional.

Apesar das distintas abordagens educacionais dos dois programas, o tema das transformações geométricas – reflexões e rotações – está presente em ambos os programas, no mesmo ciclo de ensino. A abordagem proposta pelo PMEB (ME, 2007) é didaticamente mais integradora do que a abordagem do PMCM (MEC, 2013) que remete os professores para um conjunto de metas curriculares com uma perspetiva axiomática da geometria. Como nos refere Bastos (2007),

> As isometrias (…) devem ser trabalhadas em conjunto porque é na comparação das suas propriedades – pontos fixos, orientação dos originais e das imagens e outras – e nas composições e relações entre elas que reside a tal estrutura que devemos ir progressivamente revelando aos alunos, ao longo da escolaridade (p. 27).

No âmbito do mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, destinado à formação de professores dos anos iniciais, lecionei a unidade curricular de Transformações Geométricas no 1.º semestre do 2.º ano do referido curso de mestrado. A turma era constituída por seis futuros professores detentores de uma licenciatura em Educação Básica. Nesta licenciatura, os futuros professores frequentaram cinco unidades curriculares na área científica da matemática, envolvendo as subáreas dos números, geometria, medida, álgebra, estatística e probabilidades. Assim sendo, os futuros professores tinham uma formação global no contexto da matemática para o ensino nos primeiros anos de escolaridade. Contudo, o conhecimento sobre transformações geométricas era pouco consistente, em consonância com o estudo realizado por Gomes (2012) em que os "futuros professores não parecem estar preparados para ensinar transformações geométricas. (…) Aparentemente o modo como as transformações geométricas foram abordadas não permitiu ultrapassar/colmatar muitas das dificuldades/erros apresentadas pelas alunas" (p. 241).

Nesta comunicação irei abordar as ideias matemáticas de simetria, rosácea, friso e padrão, a partir das conceções dos seis futuros professores no decorrer das aulas de mestrado, tendo por propósito realçar as conceções explícitas e as práticas subsequentes que resultaram numa alteração das ideias matemáticas iniciais dos futuros professores.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. Simetria: Conceções, Definição e Prática

As simetrias abordadas nos primeiros anos de escolaridade reduzem-se à reconstrução de uma figura a partir da sua *metade*, através da reflexão em relação a um eixo vertical ou horizontal. Os futuros professores tinham, no ano letivo anterior, lecionado, em contexto de supervisão, no 1.º ciclo do ensino básico. Apenas um dos futuros professores tinha abordado o tema no contexto das suas aulas supervisionadas – «Dei as simetrias [1.º ciclo] (…) foi só mesmo desenhar de um lado para o outro» [Inês] – em torno da reflexão de uma figura segundo um eixo e não da identificação do eixo de reflexão numa figura com simetria axial.

Simetria Axial. As conceções dos futuros professores, apesar de todo o percurso escolar anterior, resultavam no conceito de simetria restrito à simetria axial – «Segundo um eixo, uma linha no centro da imagem (…) quando sobrepostos tem que haver coincidência total dos pontos» [Sara]. Questionados sobre as simetrias do quadrado, os futuros professores identificaram as quatro simetrias axiais do quadrado, associadas às duas diagonais do quadrado e às duas mediatrizes dos pares de lados paralelos ao quadrado – «[As] transformações que tu podes fazer para obter a mesma figura (…) Só conseguimos colocar o espelho em quatro posições» [Helena].

Simetria Rotacional. Interrogados sobre a simetria de um quadrado após a rotação de um quarto de volta, de meia volta ou de três quartos de volta da figura plana com centro no ponto de interceção das suas diagonais, os futuros professores observaram que «estamos a rodar em relação a um ponto e não a um eixo» [Ana], reconhecendo que a imagem no seu todo mantem-se inalterada. Este confronto originou uma questão de uma futura professora: «Para ser simétrica tem que ser em relação a um eixo ou não?» [Helena].

Simetria Axial e Rotacional. Esta interrogação despoletou a necessidade de apresentar a definição de simetria em figuras planas:

> Numa figura, a *simetria* consiste numa transformação que mantém a figura invariável na medida em que, depois de submetida a essa transformação, mantém, globalmente, o seu aspeto inicial, embora alguns dos seus pontos possam ser deslocados em consequência da mesma (Devlin, 2002, p. 152).

A partir da definição de simetria em figuras isométricas, particularizou-se os casos da simetria axial e da simetria rotacional. A sistematização do conceito resultou num reconhecimento, por parte dos futuros professores, que as suas conceções sobre as simetrias

ISBN 978-84-945722-3-4

divergiam da definição – «[As definições] são mais completas do que as ideias que nós tínhamos (…) aquilo que aprendemos e fizemos na escola» [Sara] – em resultado de práticas letivas muito associadas às simetrias axiais e pouco exploradas no que respeita às simetrias rotacionais.

A partir da definição de simetria em figuras planas ocorreu a exploração de situações extremas e a reflexão sobre a simetria de uma figura com uma rotação de zero graus. Perante o questionamento do número de simetrias de um segmento de reta, os futuros professores começaram por identificar uma simetria de reflexão segundo um eixo perpendicular ao segmento no seu ponto médio (mediatriz) e uma simetria de rotação de meia volta em torno do ponto médio do segmento – «Tem simetria de reflexão e em termos de rotação, se nós fizermos assim (roda com centro no ponto médio) só uma, só tem uma simetria, não vamos contar com o zero» [Sara]. A identificação da simetria axial com eixo coincidente ao segmento de reta e a simetria rotacional de volta inteira não surgiu de modo imediato, mas em resultado da exploração da definição de simetria e da noção de dimensão zero das linhas em geometria.

A identificação das simetrias axiais e rotacionais de um polígono regular, após a discussão inicial em torno do quadrado, transformou-se num mero exercício. Contudo, a generalização do círculo como um polígono regular de *infinitos* lados não foi pacífica – «Quantas simetrias axiais e rotacionais tem um circulo? As simetrias axiais e rotacionais são exatamente as mesmas» [Sara] «Se calhar não é infinito» [Helena] «Já não é um polígono regular, aquilo pode já não se verificar!» [Rúben]. O questionamento em relação às suas próprias conceções gerou um aprofundamento do conhecimento matemático e a não assunção óbvia, apesar da sua evidência, do círculo como uma figura simétrica com reflexões em qualquer diâmetro e rotações à volta do centro em qualquer ângulo. A exploração de simetrias axiais e rotacionais gerou um reconhecimento em diversos contextos como por exemplo na natureza (figuras 1 e 2) ou na arquitetura (figura 3).


Figura 1: Feijões


Figura 2: Aloe polyphylla


Figura 3: Porta

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Estes casos de simetrias axiais (figura 1), com uma reflexão vertical, de simetria rotacional (figura 2), com uma rotação no centro da planta e um angulo de 72º (setenta e dois graus) e de simetria de translação (figura 3) (imaginando um prolongamento da transformação), com o vetor de *meia porta*, retratam as simetrias de reflexão, rotação e translação. Esta abordagem didática a partir de artefactos naturais ou culturais é defendida pelos futuros professores como uma forma dos alunos autonomamente construírem o seu conhecimento matemático – «Um trabalho que poderia ser realizado com os alunos, desde a recolha de fotografias, à sua análise» [Ana].

3. Rosáceas: Definição e Representações

Dá-se o nome de rosácea às figuras que admitem repetições dentro de uma região limitada do plano, em torno de um ponto, isto é, que admitem simetrias rotacionais, mesmo que não tenham simetrias axiais. No caso de terem apenas simetrias rotacionais, as rosáceas são grupos cíclicos; no caso de terem, em igual número, simetrias axiais e rotacionais são grupos diedrais (Bellingeri, Dedò, di Sieno & Turrini, 2003). Numa rosácea os eixos de simetria, quando existem, passam todos pelo centro de rotação (único) de todas as simetrias rotacionais. A associação das rosáceas à forma circular parece condicionar as perspetivas dos futuros professores à classificação de outras formas em rosáceas, como por exemplo algumas letras maiúsculas do alfabeto. A propósito da discussão em torno das simetrias da letra S (naturalmente que depende do tipo de letra), os futuros professores identificaram-na como uma rosácea cíclica – «[O S] tem 180 [meia volta]. Só tem rotacional» [Sara]. Este mesmo confronto com as conceções de rosácea ocorreu a propósito de uma gravura do pintor Nassos Daphnis (figura 4) utilizada para ilustrar um exemplo de rotação por meia volta sem reflexões – «Já viram, não tem aspeto de rosácea [cíclica]» [Cátia].

Figura 4: Nassos Daphins (1978)

Num estudo (Batista, Guerreiro & Lopes, 2015), desenvolvido no 2.º ciclo do ensino básico, alguns alunos identificaram na gravura (figura 4) uma simetria de meia volta com centro no centro da gravura – ponto de interceção das diagonais do quadrado, contudo outros alunos imaginaram erradamente a existência de reflexões nesta gravura.

ISBN 978-84-945722-3-4

4. Frisos: Definição e Representações

Os motivos repetidos numa única direção, através de translações, são grupos infinitos e denominam-se grupos de frisos. A classificação de frisos sem reflexões horizontais mas com reflexões deslizantes (figura 5), de entre os sete tipos de frisos, geraram maior discussão em motivo da dificuldade de identificação da célula do friso (figura 6):

Figura 5: Friso

Figura 6: Possível célula do friso

Os futuros professores identificaram com facilidade a reflexão vertical e a ausência de reflexão horizontal – «Acho que tem um eixo vertical (…) e depois não tem eixo horizontal» [Inês] – mas mostraram maior dificuldade na identificação da reflexão deslizante – «Tem uma horizontal deslizante (…) vai para baixo e desliza um bocadinho» [Cátia]. A identificação da célula do friso – motivo mínimo que reconstrói o friso apenas por translações – tornou-se um auxiliar importante na classificação dos frisos.

A classificação do friso (figura 7), sem atender à irregularidade da faixa de fundo, gerou controvérsia até à identificação da célula do friso.

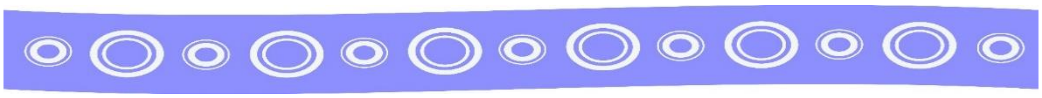

Figura 7: Friso

Os futuros professores começaram por não identificar qualquer simetria – «Não tem reflexão vertical, tem horizontal e não tem rotação» [Sara] –, em resultado das dimensões distintas dos círculos, ou reconhecer apenas reflexões verticais – «Tem vertical [Ana e Inês]». A identificação da célula do friso gerou um maior conhecimento sobre o mesmo – «Uma (círculo) inteira e duas metades, assim já tem» [Helena] –, gerando uma correta classificação do friso – «Para mim tem tudo» [Cátia].

Os futuros professores classificaram diferentes tipos de frisos e desenvolveram atividades de geração de novas composições de frisos, a partir de um friso existente, por variação das regras dos grupos de simetrias (Pires, Silva, Alves, Dametto & Vecchia, 2013). Esta abordagem foi desenvolvida por uma futura professora a partir de frisos dos gradeamentos dos balcões de varandas de estilo pombalino (século XVIII), destacando a importância da relação com os artefactos culturais na construção do conhecimento matemático:

ISBN 978-84-945722-3-4

> Este olhar diferente para diversos elementos nomeadamente gradeamentos, azulejos, portões, portas, máscaras, tecidos, entre outros, tanto em contexto de sala de aula como fora desta, foi um aspeto fundamental e potenciador de aprendizagens, uma vez que todos eles permitiam momentos de análise e de discussão permitindo uma aprendizagem constante [Cátia].

Decorrente da análise dos frisos com reflexões deslizantes ou com meia volta, os futuros professores identificaram a existência meia volta, rodando a figura, através da verificação da manutenção da configuração global e, após a identificação ou não da meia volta, discutiram a existência de reflexões verticais, horizontais ou deslizantes.

5. Padrões: Definição e Representações

Os padrões são motivos (célula de malha) repetidos em duas direções cujos vetores das translações estruturam uma rede retangular, quadrada ou rômbica (Veloso, 2012). Numa investigação de Viseu, Menezes e Almeida (2013) com professores do 1.º ciclo do ensino básico, os "professores do estudo reconhecem a noção de figura padrão de uma pavimentação mas não identificam as transformações geométricas necessárias para pavimentar o plano" (p. 175), quando solicitados a delimitar a unidade padrão na pavimentação (figura 8) e a referir como se obtém a pavimentação.

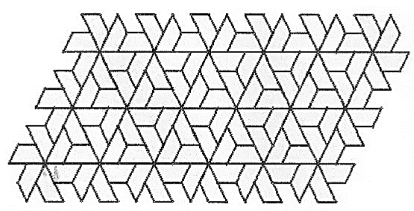

Figura 8: Pavimentação

Todos os futuros professores, durante o trabalho com padrões, identificaram como figura padrão um trapézio, a figura composta por seis trapézios (hélice) ou o triângulo (composição de três trapézios), tal como no caso dos professores, e o losango (dois triângulos com seis trapézios), como célula de malha, que não ocorreu no estudo referido. Os futuros professores reconstroem o padrão a partir de translações em duas direções (horizontal e oblíqua) a partir da hélice (6) e do losango (5), denotando um conhecimento da estrutura de um padrão.

Contudo, no questionamento sobre a identificação da célula da malha de padrões de azulejos de inspiração árabe, sem atender às cores, os futuros professores revelaram dificuldades na comunicação matemática especifica a propósito do padrão representado (figura 9): «Um

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

quadrado (…) tem como vértice o centro das flores (…) o centro do quadrado é o centro da flor» [Inês]; «Um vértice nas coisinhas azuis (…), essas coisinhas azuis fora da flor (…) e vai ter ao outro vértice da coisinha azul da flor que está ao lado» [Rúben].

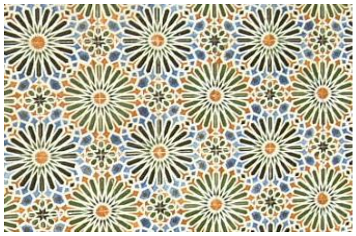

Figura 9: Padrão

Figura 10: Plano da célula da malha

A tentativa de identificar uma célula de malha menor originou a identificação da região do plano contido na célula da malha (figura 10), a partir do qual se constrói o padrão com outras simetrias para além das translações:

> Cátia: – Tenho uma peça pequenina (…) dois vértices no centro das flores e dois vértices nas estrelinhas alternadamente.
>
> Professor: – Será que reproduz?
>
> Cátia: – Não reproduz nada (…) tem de ser refletido.

O estudo das transformações geométricas resultou num treinar do olhar matemático para estes futuros professores – «Treinar o olhar torna-se uma ferramenta quase essencial para despertar a curiosidade e o interesse simultâneo em assuntos que à partida nada teriam em comum» [Helena] –, o que originou um olhar distinto sobre a produção cultural da sociedade, como referem Lopes, Alves e Ferreira (2015), "a percepção de padrões simétricos em traços arquitetónicos e nas artes é reflexo da produção cultural de uma sociedade" (p. 570), perspetiva assumida pelos futuros professores – «Partir desse elemento particular da arquitetura algarvia [chaminés algarvias], não só permite uma maior contextualização do trabalho, como ao mesmo tempo é dada uma relevância aos aspetos culturais, que muitas vezes são esquecidos ou colocados de parte» [Sara].

6. Fecho: Destaques

A redução das conceções dos futuros professores sobre simetrias de uma figura às simetrias axiais ilustrou a necessidade de formação complementar sobre transformações geométricas. Neste sentido, a análise de situações extremas como segmentos de reta originou um aprofundamento do conceito e uma valorização do conhecimento matemático. A exploração de rosáceas distintas da *forma circular* constituiu uma abordagem que reforçou o

ISBN 978-84-945722-3-4

conhecimento da definição e da identificação de rosáceas cíclicas e diedrais em contextos artísticos, valorizando o olhar matemático sobre os artefactos culturais. Os frisos com reflexões deslizantes e com dois eixos de reflexão vertical apresentaram dificuldades acrescidas na sua classificação. A identificação da célula da malha de um padrão e a respetiva comunicação das suas características constituiu o maior entrave à classificação de padrões. O reforço do conhecimento matemático resultou de uma diversidade de exemplos de simetrias, rosáceas, frisos e padrões.

Referencias bibliográficas

Bellingeri, P., Dedò, M., di Sieno, S. & Turrini, C. (2003). *O ritmo das formas*. Lisboa: Atractor.

Bastos, R. (2007). Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.

Batista, D.; Guerreiro, A. e Lopes, A. (2015). Arte Contemporânea no Ensino das Transformações Geométricas. *Educação e Matemática,* 131,38-44.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: porto Editora.

Lopes, L., Alves, G., Ferreira, A. (2015). *Educação & Realidade*, 40 (2), 549-572.

Ministério de Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME.

Ministério de Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

Pires, J., Silva, A., Alves, C., Dametto, A. & Vecchia, L. (2013). Padrões de Simetrias e Recursão em Ladrilhos Hidráulicos e Bandeiras: Exercícios Didáticos e Construção de Conhecimento Sobre Patrimônio Histórico. *XVII Conference of the Iberoamerican Society of Digital Graphics: Knowledge-based design.* Valparaíso: UTFSM.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM

Viseu, F., Menezes, L. & Almeida, J. (2013). Conhecimento de geometria e perspetivas de professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o seu ensino. *Revemat*. 08 (1), 156-178.

ISBN 978-84-945722-3-4